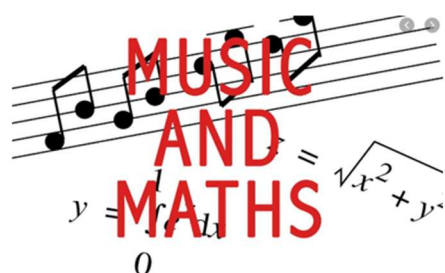


MATHEMATIQUE ET MUSIQUE



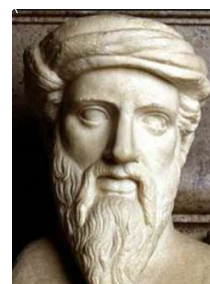
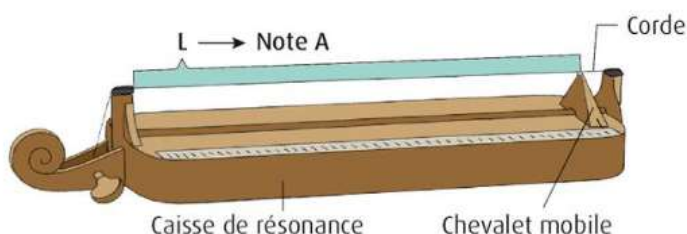
Vincent CREVAT Pierrefitte-sur-Loire janvier 2026

Testez vos connaissances :

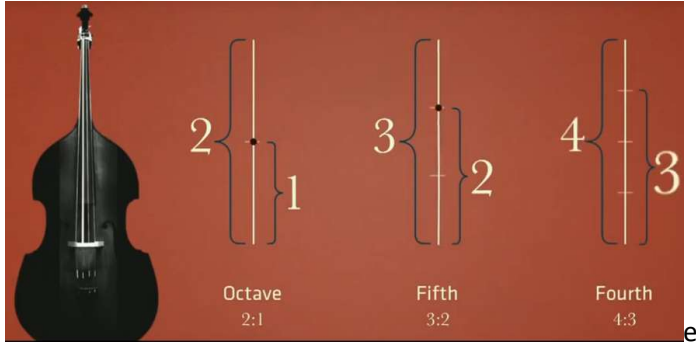
1. Pourquoi y-a-t-il 12 notes dans la gamme?
2. Quelle idée d'avoir des tons et des demi-tons?
3. Pourquoi on ne connaît que 7 noms de notes?
4. On apprend en solfège que Sol# et Lab sont 2 notes différentes?
5. C'est quoi un accord?
6. Une note de musique c'est une vibration, quel lien avec les maths?
7. Est-ce que les gammes sont les mêmes dans tous les pays?

1. La découverte de Pythagore (500 avant JC)

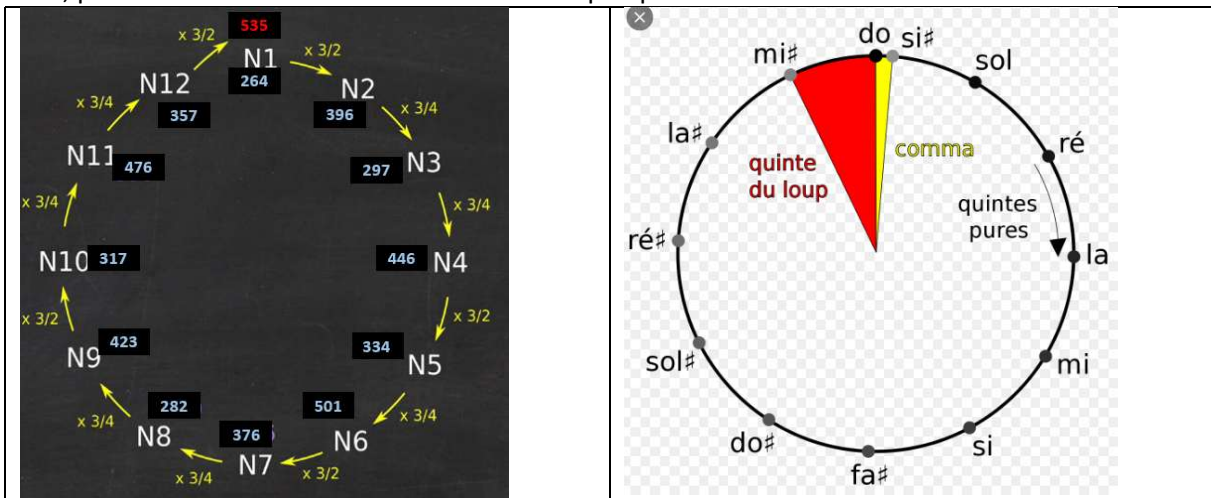
En Grèce antique la croyance était que les nombres entiers régissent les lois du monde. Le monocorde de Pythagore :



Notion d'octave (1/2) de quinte (3/2), de quarte (4/3) les rapports les plus simples entre 2 entiers



Ronde des quintes : On cherche les quintes de la quinte, quinte de la quinte de la quinte et ainsi de suite, puis on s'arrête à 12 fois car on retombe à peu près sur l'octave



Mais la dernière quinte ne retombe pas sur le do de départ. La dernière quinte est fautive si on veut retomber sur l'octave : elle est appelée quinte du loup.

Ceci s'explique par le fait que les puissances de 2 ne coïncident pas avec les puissances de 3. Ce n'est juste qu'à 2% près.

$$F \xrightarrow{\times 3/2} \left(\frac{3}{2}\right) F \xrightarrow{\times 3/2} \left(\frac{3}{2}\right)^2 F \xrightarrow{\times 3/2} \left(\frac{3}{2}\right)^3 F \dots \xrightarrow{\times 3/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{11} F \xrightarrow{\times 3/2} \left(\frac{3}{2}\right)^{12} F$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} F = 129,7 F \approx 128 F = 2^7 F$$

12 quintes 7 octaves

Avec cette méthode Pythagore trouve une gamme qui réordonnée en fréquences croissantes :

Pour 5 premières notes :

	Do	1	Re	2	3	Mi	4	5	6	Sol	7	8	9	la	10	11	Do	12
pentatonique	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					
position	fond		quinte 2		quinte 4			quinte 1		quinte 3							quinte 12	
rapport en ^	Do		Ré		Mi			Sol		la							Do	
rapport en fraction	1		9/8		81/64			3/2		27/16							2	
gamme (Hz)	264		297		334			396		446							528	

	<-----petit----->	<-----petit----->	<-----grand----->	<-----petit----->	<-----grand----->
ecart entre blanches	1,125	1,125	1,185	1,125	1,185
	9/8	9/8	32/27	9/8	32/27

Pour 7 premières notes :

	Do	Re	Mi	Fa	Sol	la	Si	Do					
5 quinte +1 quarte	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
position	fond		quinte 2		quinte 4	quarte1		quinte 1		quinte 3		quinte 5	quinte 12
rapport en ^	0		0		0	1/2T		0		0		0	0
rapport en fraction	1		9/8		81/64	4/3		3/2		27/16		9/8	2
gamme (Hz)	264		297		334	352		396		446		501	528

		<-----petit----->	<-----petit----->	<-demi-->	<-----petit----->	<-----petit----->	<-----petit----->	<-demi-->
ecart entre blanches		1,125	1,125	1,05	1,125	1,125	1,125	1,05
		9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

Gamme de 5 notes:

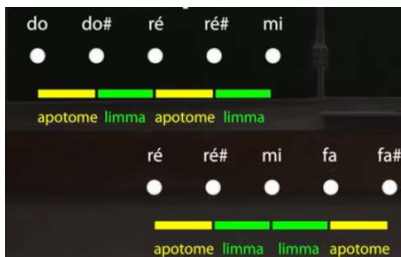
		<-----petit----->	<-----petit----->	<-----grand----->	<-----petit----->	<-----grand----->
ecart entre blanches		1,125	1,125	1,185	1,125	1,185
		9/8	9/8	32/27	9/8	32/27

Pour 12 premières notes : on explique ainsi les tons et les demi-tons et leur position dans la gamme

	Do	Do#	Re	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	la	La#	Si	Do
avec quintes pour #	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
position	fond	quinte 7	quinte 2	quinte 9	quinte 4	quarte1	quinte 6	quinte 1	quinte 8	quinte 3	quinte 10	quinte 5	quinte 13
gamme	264	282	297	317	334	352	376	396	423	446	476	501	528
					tierce fausse	quarte juste		quinte juste					
V	<-----3/2----->												
II	<-----9/8----->												
VI	<-----27/16----->												
III	<-----81/64 = 1,265----->												
VII	<-----243/128----->												
	<-----729/512----->												
	<-----2187/2048----->												
	<-----6561/4096----->												
	<-----19683/16384----->												
	<-----59049/32768----->												
IV	<-----4/3 = 1,333----->												

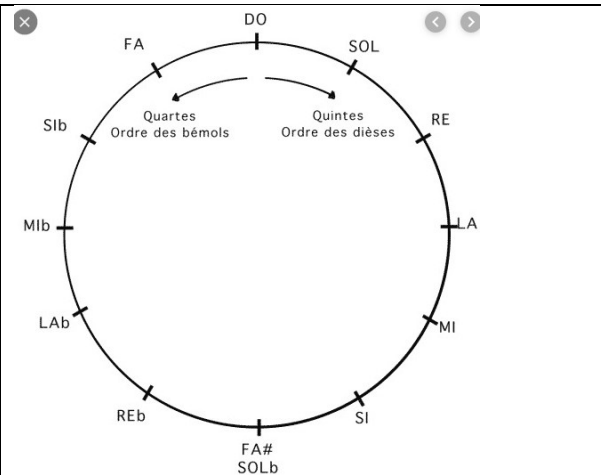
ecart entre notes		1,068	1,053	1,068	1,053	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,068	1,053	1,053
		2187/2048	256/243	2187/2048	256/243	256/243	2187/2048	256/243	2187/2048	256/243	2187/2048	256/243	256/243

Conséquence : les intervalles ne sont pas les mêmes, donc le do# n'est pas au milieu de l'intervalle entre Do et Ré. Du coup impossible de transposer : on ne peut jouer qu'en 1 tonalité

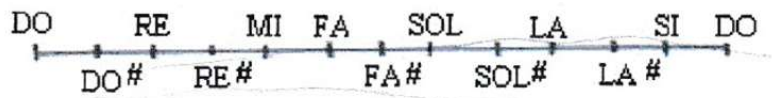


De la même façon que nous avons créé une gamme avec les quintes, nous pouvons faire de même avec les quartes : nous tournons dans l'autre sens et nous arrivons à une gamme similaire

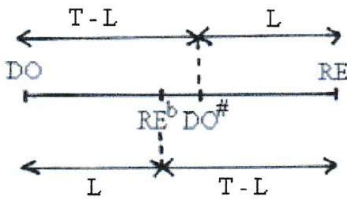
Et nous remarquons que le Réb n'est pas tout à fait le Do#. Il y a un coma de différence $3^{12}/2^{19}$ = comma pythagoricien



Avec les quintes ascendantes



Avec les quintes descendantes ou quartes



donc voilà pourquoi Do# et Lab ne sont pas égales en fréquence

2. La revanche de la tierce avec Zarlino (1558)

Zarlino a l'idée de donner à la gamme des tierces justes, ce que n'avait pas la gamme de Pythagore Tierce juste $5/4 = 1,25$ chez Pythagore $81/64 = 1,265$

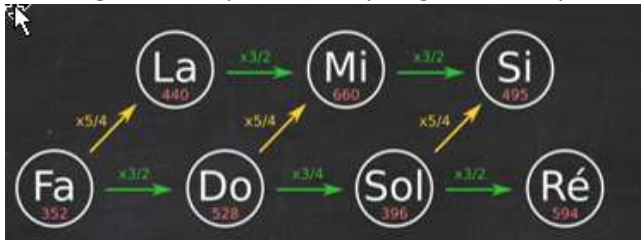
Il existe 2 tierces :

Majeure : $5/4$ de la fondamentale

Mineure : $6/5$ de la fondamentale

Et on remarque que tierce mineure + tierce majeure = tierce majeure + tierce mineure = quinte (car $5/4 * 6/5 = 3/2$)

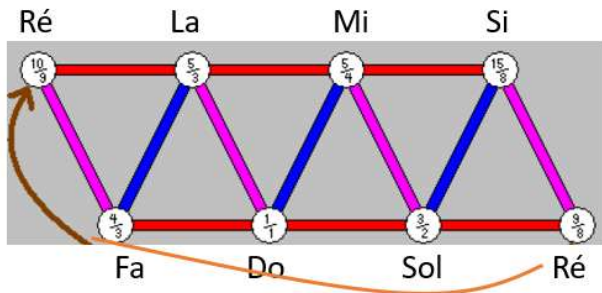
Zarlino garde des quintes de Pythagore et remplace les tierces de chaque note



Il obtient une nouvelle gamme

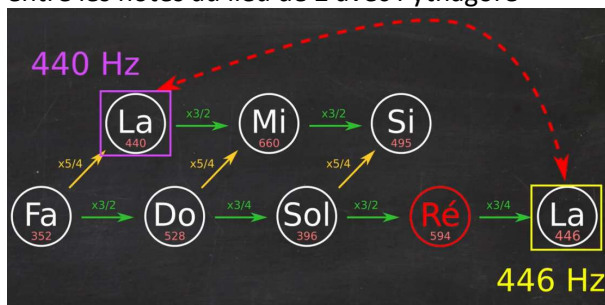
	Do	Re	Mi	Fa	Sol	la	Si	Do					
7 notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gamme zarlino	fond			5fo			3fo			440		495	528
			terce mineure	terce maj juste	quarte		quinte juste						
V	←-----3/2=1,5----->										idem Pythagore		
II	←-----9/8=1,125----->										idem Pythagore		
VI	←-----5/3=1,666----->										terce de la tierce		
III	←-----5/4=1,25----->										terce		
VII	←-----15/8=1,875----->										quinte de la tierce		
IV	←-----4/3=1,333----->										idem Pythagore		

Gamme majeure : quinte en rouge, tierce majeure en bleue, tierce mineure en rose



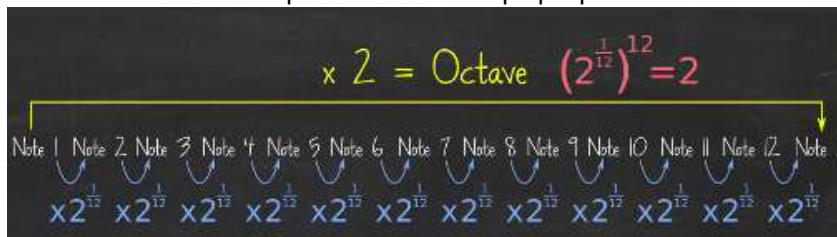
80/81

On ne peut toujours pas transposer car on n'arrive pas à une octave juste et on a 3 types d'intervalle entre les notes au lieu de 2 avec Pythagore



3. La gamme tempérée de Bach (1600)

La solution est trouvée par Simon Stevin qui propose une division exacte par 12 d'une octave :



Chaque intervalle est identique : racine 12eme de 2

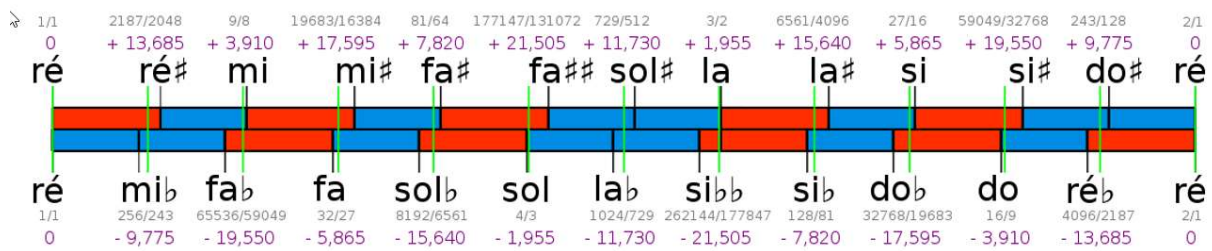
Gros avantage : on retrouve précisément l'intervalle de l'octave, donc on va pouvoir transposer et jouer en diverses tonalités

Inconvénient : aucune note n'est juste, mais rien n'est vraiment faux !

Quinte : $x 2^{\frac{7}{12}} = 1,498 \approx 3/2$

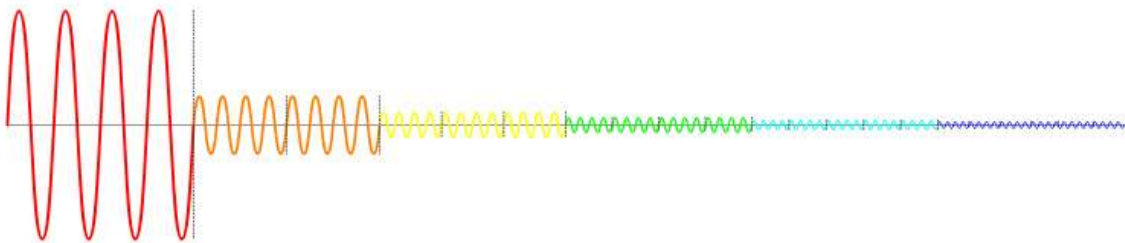
Tierce : $x 2^{\frac{4}{12}} = 1,26 \approx 5/4$

Donc on retrouve des différences sur toutes les notes : en vert la gamme tempérée, et rouge et bleu la gamme de Pythagore

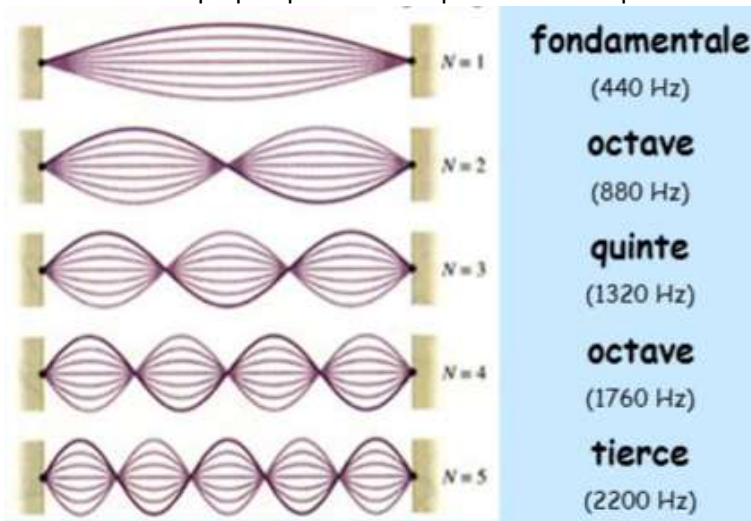


4. Les harmoniques d'une note :

L'étude physique de la vibration d'une corde de guitare montre que la corde Mi ne vibre pas qu'avec la fréquence du Mi, mais avec également des harmoniques du Mi, c.a.d. toutes les fréquences multiples de la fréquence fondamentale du Mi (2 x fondamentale, 3 x fondamentale, ..., n x fondamentale)

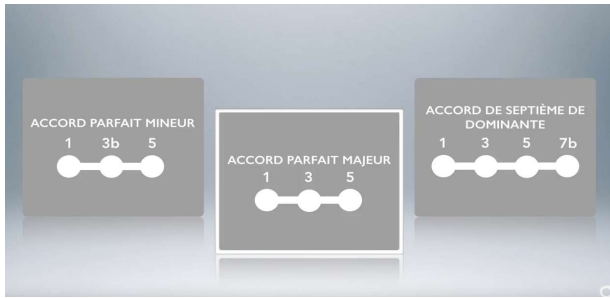


Quels sont les premiers harmoniques que l'on trouve ? Après la fondamentale, on trouve la quinte et la tierce. Ceci explique qu'un accord parfait est composé de fondamentale, tierce et quinte



L'harmonique suivant est la 7ème mineure, ce qui explique pourquoi l'accord de 7ème a toujours une composante mineur en 7.

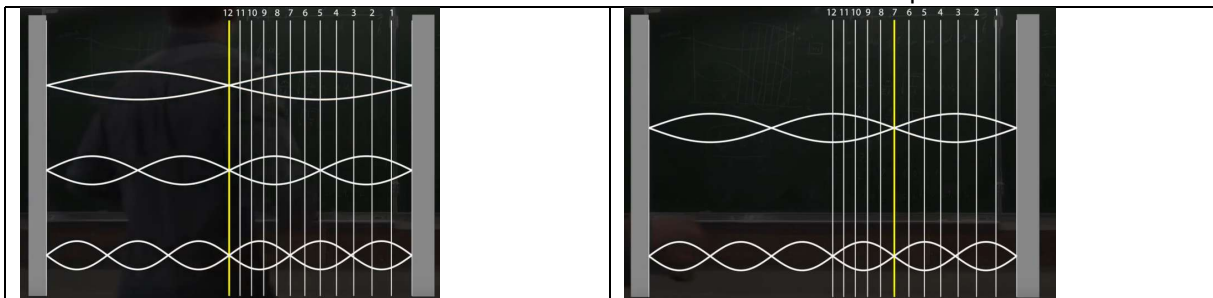
Ce qui explique également pourquoi les marteaux d'un piano sont placés à 1/7 de la corde pour supprimer l'harmonique 7b



il est à noter que l'amplitude des harmoniques diminue avec le rang de l'harmonique en $1/n^2$ pour la guitare, et $1/n$ pour le piano. Donc l'oreille entend les premiers mais très vite n'entend plus les harmoniques de rang élevé. Ceci explique également que les harmoniques du piano sont plus riches. Sur une guitare en mettant le doigt sur certaines positions on fait entendre les harmoniques :

Sur la 12eme frette : octave

sur la 7eme frette : quinte

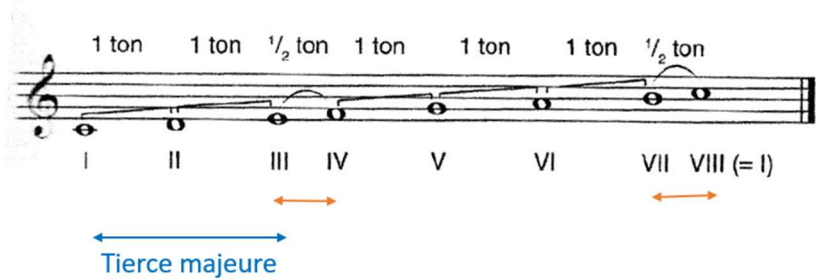


Ceci sert à accorder une guitare

5. Les gammes et les accords:

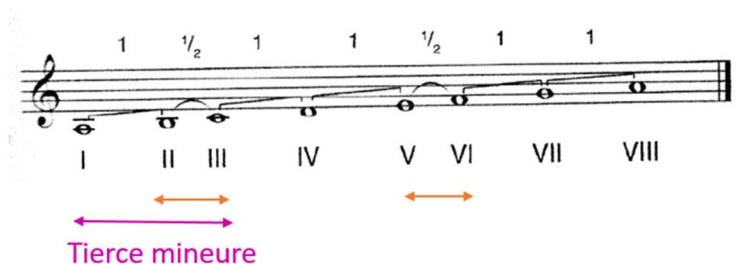
La gamme majeure

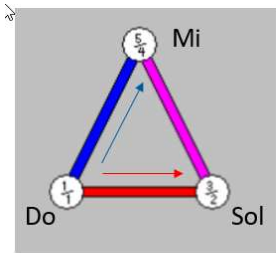
Gamme de Do



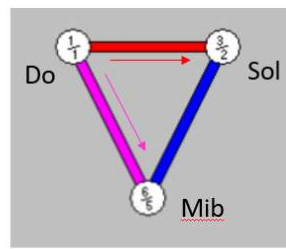
La gamme mineure

Gamme de Lam





Accord majeur Do (C)
Do Mi Sol



Accord mineur Dom (Cm)
Do Mib Sol

Gamme de **Do majeur** et ses accords : 3 accords majeurs degré I, IV et V

	Accords gamme Do	Degrés
A C E	Minor	VI
B D F	Diss.	VII
C E G	Major	I
D F A	Minor	II
E G B	Minor	III
F A C	Major	IV
G B D	Major	V

Avec les mêmes notes on peut faire la gamme de **La mineur** : 3 accords mineurs degré I, IV, et V

	Accords gamme Lam	Degrés
D F A	min	IV
E G B	min	V
F A C	maj	VI
G B D	maj	VII
A C E	min	I
B D F	Diss	II
C E G	maj	III

6. Esthétique et mathématiques :

La suite de chiffre 1,2,3,5,8,13,21,34... s'appelle la suite de Fibonacci. Elle est obtenue par la formule suivante : chaque terme est la somme des 2 précédents.

Si on regarde le rapport a_n/a_{n-1} entre 2 chiffres consécutifs on peut montrer qu'il se rapproche de plus en plus du nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui est appelé le nombre d'or $\phi = 1.6180339...$

C'est aussi la solution de l'équation $x^2=x+1$ car $\phi^2 = \phi + 1$

Or ce nombre est omniprésent dans la nature :

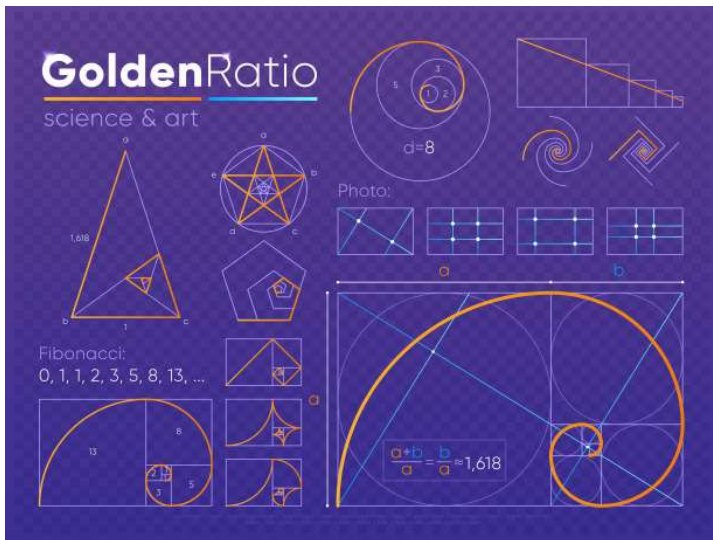
Nombre de pétales d'une Fleur est pioche dans la suite de Fibonacci

les galaxies forment une spirale de Fibonacci

les coquillages également, la pomme de pin

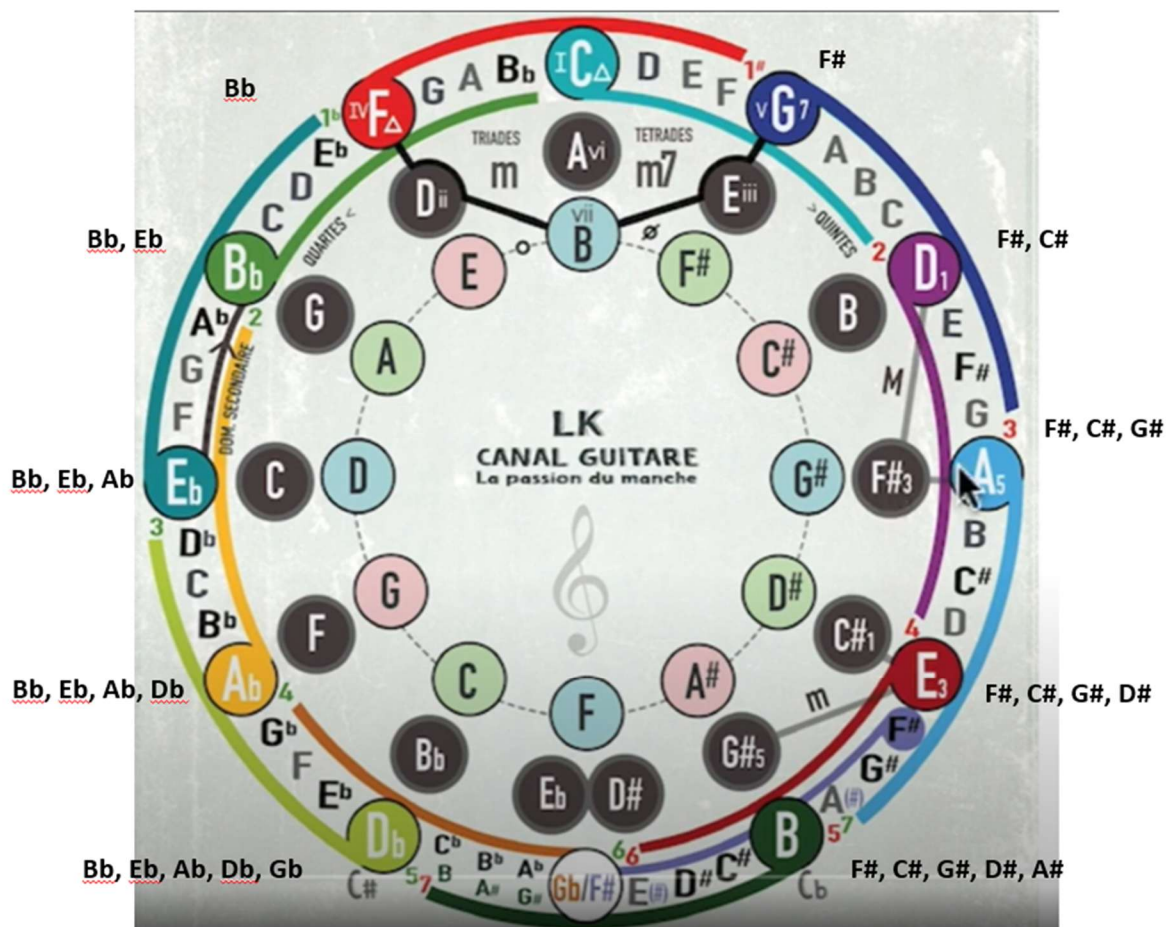
Certains tableaux sont peints avec ces proportions

les théâtres romains, les pyramides, les temples grecs se retrouvent avec ces proportions..



Est-ce à dire que l'esthétique obéit à une loi mathématique ?
Dans tous les cas les mathématiques expliquent le monde qui nous entoure avec une certaine beauté.

7. Intérêt de la ronde des quintes pour un musicien :



Bb, Eb, Ab, Db, Gb, Cb F#, C#, G#, D#, A#, E#

